

Epreuve sur dossier du CAPES externe de mathématiques, session 2010

(ORAL 2)

Ce document contient la liste des dossiers proposés aux candidats passant le second oral du CAPES externe 2010, telle qu'elle a été publiée sur le site officiel du Jury de l'époque.

Pour me contacter : dany-jack.mercier@hotmail.fr.
Pour surfer sur MégaMaths (Prépa CAPES) : http://megamaths.perso.neuf.fr/ (en 2010).

[0] [epreuvesurdossier2010]

Dossier du 26 juin 2010

Thème : Étude de suites

1. L'exercice proposé au candidat

Soit a un réel. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier n :

$$u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$$

1) Étudier les cas $a = 0$, $a = 1$ et $a = 2$.

   Dans toute la suite, on suppose que $a \in]0; 1[$.

2) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = x(2 - x)$.
3) Montrer que, pour tout entier n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
4) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

2. Le travail demandé au candidat

> En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Le candidat présentera au Jury :

◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice ;

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse à la question 4) ;

◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Étude de suites** ».

Dossier du 27 juin 2010

Thème : Probabilités

1. L'exercice proposé au candidat

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue au hasard n tirages successifs ($n \geqslant 2$) d'une boule en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.

1) 1.a) Calculer la probabilité de l'événement « toutes les boules tirées ont la même couleur ».

   1.b) Calculer la probabilité de l'événement « on obtient exactement une boule blanche ».

   On considère les deux événements A et B suivants :

   A : « on obtient des boules des deux couleurs »

   B : « on obtient au plus une boule blanche »

2) Calculer les probabilités $P(A \cap B)$, $P(A)$ et $P(B)$.
3) Montrer que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ si et seulement si l'entier n vérifie l'égalité $2^{n-1} = n + 1$.
4) En déduire qu'il existe une valeur unique de n pour laquelle A et B sont deux événements indépendants (on pourra considérer la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ définie par $u_n = 2^{n-1} - (n + 1)$ et montrer qu'elle est strictement croissante).

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Le candidat présentera au Jury :

- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice ;
- ◇ sa réponse à la question 1)

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ la réponse à la question 2) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Probabilités** ».

Dossier du 28 juin 2010

Thème : Équations différentielles

1. L'exercice proposé au candidat

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

1) On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$. Pour tout point M d'abscisse t appartenant à $\mathcal{C}$, on considère le point P de coordonnées $(t, 0)$ et le point N, point d'intersection de la tangente en M à $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses. Montrer que la distance PN est constante.

2) Dans la suite de l'exercice f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$, strictement positive, dérivable et dont la fonction dérivée est strictement positive. Pour tout point M d'abscisse t appartenant à la courbe représentative de f, on considère le point P de coordonnées $(t, 0)$ et le point N, point d'intersection de la tangente en M à la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.

   2.a) Calculer la distance PN en fonction de $f(t)$ et de $f'(t)$.

   2.b) Déterminer une équation différentielle (E_k) vérifiée par les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, strictement positives, dérivables et dont la fonction dérivée est strictement positive, pour lesquelles la distance PN est une constante k.

   2.c) Déterminer les fonctions f solutions de (E_k).

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Le candidat présentera au Jury :

- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice ;
- ◇ sa réponse à la question 2) .

Le candidat rédigera sur ses fiches :

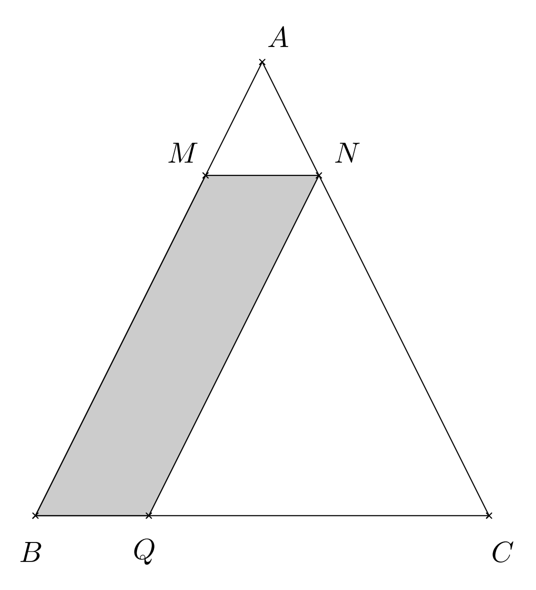
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Équations différentielles** ».

Dossier du 29 juin 2010

Thème : Calcul de grandeurs : longueurs, aires, volumes

L'exercice proposé au candidat

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AC = 5$ et $BC = 6$. Un point M se déplace sur le segment $[AB]$ en restant différent des points A et B. Le point N est l'intersection de (AC) et de la parallèle à (BC) passant par M. On désigne par Q le point du segment $[BC]$ tel que le quadrilatère $MNQB$ soit un parallélogramme. On se propose de déterminer la position du point M sur le segment $[AB]$ pour que l'aire du parallélogramme $MNQB$ soit maximale. Pour cela on pose $AM = x$ et on note $f(x)$ l'aire du parallélogramme $MNQB$.



1) Montrer que $MN = \dfrac{6}{5}x$ et en déduire l'aire du triangle AMN.
2) Montrer que $QC = \dfrac{6}{5}(5 - x)$ et en déduire l'aire du triangle CNQ.
3) Montrer que $f(x) = \dfrac{12}{25}(-2x^2 + 10x)$.
4) Déterminer la valeur de x pour laquelle $f(x)$ est maximal.

> En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le travail demandé au candidat

Le candidat présentera au jury :

- ◇ Les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice ;
- ◇ un énoncé à présenter en classe de Seconde pour résoudre la question 4) de l'exercice.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 1).
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème : « **Calcul de grandeurs : longueurs, aires, volumes** ».

Dossier du 30 juin 2010

Thème : Arithmétique

1. L'exercice proposé au candidat

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on pose $a_n = 1! + 2! + \cdots + n!$
On donne la décomposition en facteurs premiers des dix premiers termes de la suite (a_n)

$a_1 = 1$
$a_2 = 3$
$a_3 = 3^2$
$a_4 = 3 \times 11$
$a_5 = 3^2 \times 17$
$a_6 = 3^2 \times 97$
$a_7 = 3^4 \times 73$
$a_8 = 3^2 \times 11 \times 467$
$a_9 = 3^2 \times 131 \times 347$
$a_{10} = 3^2 \times 11 \times 40787$

1) Montrer que a_n n'est jamais divisible par 2, par 5 ni par 7.
2) Peut-on affirmer que a_n est divisible par 11 à partir d'un certain rang ?
3) Peut-on affirmer que, à partir d'un certain rang, a_n est divisible par 3^2 mais pas par 3^3 ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 3) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Arithmétique** ».

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 1er juillet 2010

Thème : Nombres complexes

1. L'exercice proposé au candidat

Pour chaque question, une seule des 4 propositions est exacte. Cochez pour chacune d'elle la bonne réponse sans justification.

1) Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\overline{z} + |z| = 6 + 2i$. L'écriture algébrique de z est :

☐ $\dfrac{8}{3} - 2i$ ☐ $-\dfrac{8}{3} - 2i$ ☐ $\dfrac{8}{3} + 2i$ ☐ $-\dfrac{8}{3} + 2i$

2) Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z - 1| = |z + i|$ est la droite d'équation :

☐ $y = x - 1$ ☐ $y = -x$ ☐ $y = -x + 1$
☐ $y = x$

3) Soit n un entier naturel. Le nombre $(1 + i\sqrt{3})^n$ est réel, si et seulement si, n s'écrit sous la forme

☐ $3k + 1$ ☐ $3k + 2$ ☐ $3k$ ☐ $6k$

4) Soit l'équation (E) : $z = \dfrac{6 - z}{3 - z}$ $(z \in \mathbb{C})$. Une solution de (E) est :

☐ $-2 - \sqrt{2}i$ ☐ $2 + \sqrt{2}i$ ☐ $\sqrt{3} + i$
☐ $\sqrt{3} + 2i$

5) Dans le plan complexe, A et B étant les points d'affixes respectives $z_A = -2$ et $z_B = 2i$, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant la relation $\arg\left(\dfrac{z + 2}{z - 2i}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ est inclus dans :
☐ La droite d'équation $y = -x$ ☐ Le cercle de centre $I(1 + i)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$
☐ La droite d'équation $y = x$ ☐ Le cercle de diamètre $[AB]$

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ une justification des réponses aux questions 3) et 5) du QCM ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Nombres complexes** ».

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ pour chaque item de ce QCM, les méthodes et les savoirs mis en jeu pour trouver la réponse exacte.

Dossier du 2 juillet 2010

Thème : Recherche de lieux géométriques

1. L'exercice proposé au candidat

On dira qu'un triangle ABC non aplati possède la propriété P si ses deux médianes issues de A et de B sont perpendiculaires.

1) On suppose qu'un triangle ABC a pour côtés $AB = 1$, $AC = \sqrt{2}$ et $BC = \sqrt{3}$. Vérifier que le triangle ABC est rectangle et possède la propriété P.
2) Les deux points A et B étant fixés, on cherche à déterminer l'ensemble Γ des points C tels que le triangle ABC possède la propriété P. Trouver le lieu des points G, isobarycentre des trois points A, B, C, lorsque C décrit Γ. En déduire l'ensemble Γ.
3) Soit ABC un triangle possédant la propriété P. On pose $a = BC, b = AC$ et $c = AB$. Montrer que l'on a la relation $a^2 + b^2 = 5c^2$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 2) et un énoncé plus détaillé de cette question à proposer à des élèves de première S ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Recherche de lieux géométriques** ».

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 3 juillet 2010

Thème : Intégration

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}\, e^{1-x}$$

1) On considère la fonction F définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$

   1.a) Démontrer que, pour tout réel t positif on a : $t + 2 \geqslant 2\sqrt{2}\sqrt{t}$

   1.b) En déduire que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a : $F(x) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \displaystyle\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt$

   1.c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a :
$$\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt = 4 - (x+3)e^{1-x}$$

   1.d) En déduire que, pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a : $0 \leqslant F(x) \leqslant \sqrt{2}$.

2) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :
$$u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt.$$

   Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la somme des $n-1$ premiers termes de la suite (u_n). Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale. Montrer que la suite (S_n) converge et donner un encadrement de sa limite.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 2) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Intégration** ».

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 4 juillet 2010

Thème : Fonctions, équations

1. L'exercice proposé au candidat

On considère l'équation (E) : $\sin x - \frac{x}{2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}$

1) Montrer que si x est solution de cette équation alors x appartient à l'intervalle $[-2, 2]$
2) Donner, en le justifiant, le nombre de solutions de l'équation (E).
3) Donner une valeur approchée, à 10^{-3} près par défaut, de la plus grande solution en précisant la méthode utilisée.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 2) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Fonctions, équations** ».

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 7 juillet 2010

Thème : Probabilités

1. L'exercice proposé au candidat

Dans un lycée qui ne reçoit pas d'interne, la répartition des élèves se fait de la façon suivante :

Niveau	Seconde	Première	Terminale	Total
Externes	50		85	195
Demi-pensionnaires	285	220		
Total			280	

Rappel de notation : $P_B(A)$ est la probabilité de A sachant que B est réalisé.

1) Compléter le tableau ci-dessus.
2) On rencontre un élève du lycée au hasard. On note E l'événement « l'élève rencontré est externe », T l'événement « l'élève rencontré est en terminale » et S l'événement « l'élève rencontré est en seconde ». En supposant que tous les élèves ont la même probabilité d'être rencontrés, calculer les probabilités suivantes :
   2.a) $P(E \cap S)$.
   2.b) $P(\overline{E} \cap T)$ où $\overline{E}$ est l'événement contraire de E.
3) 3.a) Les événements E et T sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse.
   3.b) Citer deux événements incompatibles.
4) Calculer les probabilités conditionnelles suivantes : $P_S(\overline{E})$ et $P_E(T)$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat présentera au Jury :

- ⋄ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice ;
- ⋄ le contenu de ses fiches.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ⋄ la réponse à la question 3) ;
- ⋄ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème **« Probabilités »**.

Dossier du 8 juillet 2010

Thème : Arithmétique

1. L'exercice proposé au candidat

1) Déterminer deux entiers relatifs u et v tel que $7u - 13v = 1$ puis déterminer tous les couples (a, k) d'entiers relatifs tels que $14a - 26k = 4$.

2) On considère deux entiers naturels a et b. Pour tout entier n, on note $f(n)$ le reste de la division euclidienne de $an+b$ par 26. On décide de coder un message, en procédant comme suit : à chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25, selon le tableau suivant :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Pour chaque lettre du message, on détermine l'entier n associé puis on calcule $f(n)$. La lettre est alors codée par la lettre associée à $f(n)$. On sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.

2.a) Montrer que les entiers a et b sont tels que : $\begin{cases} 5a + b & \equiv 10 \pmod{26} \\ 19a + b & \equiv 14 \pmod{26} \end{cases}$

2.b) En déduire qu'il existe un entier k tel que $14a - 26k = 4$.

2.c) Déterminer tous les couples d'entiers (a, b), avec $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $0 \leqslant b \leqslant 25$, tels que $\begin{cases} 5a + b & \equiv 10 \pmod{26} \\ 19a + b & \equiv 14 \pmod{26} \end{cases}$

2.d) On suppose que $a = 17$ et $b = 3$. Coder le message « GAUSS ».

2. Le travail demandé au candidat

> En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 1 et à la question 2.c) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Arithmétique** ».

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 9 juillet 2010

Thème : Utilisation des variations d'une fonction

1. L'exercice proposé au candidat

1. Pour tout réel $x > 0$, on pose : $f(x) = x - 1 - \ln(x)$.
   Étudier les variations de la fonction f et en déduire que pour tout réel $x > 0$, on a :
   $$\ln(x) \leqslant x - 1.$$
2. Soient a, b et c des réels strictement positifs : on pose $m = \dfrac{a+b+c}{3}$. En appliquant l'inégalité précédente aux réels $\dfrac{a}{m}$, $\dfrac{b}{m}$ et $\dfrac{c}{m}$, montrer que :
   $$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqslant abc$$

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 2) ;
- ◇ au moins deux méthodes différentes permettant de démontrer que pour tous réels strictement positifs a et b on a :
  $$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant ab$$
- ◇ un exercice se rapportant au thème « **Utilisation des variations d'une fonction** ».

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 10 juillet 2010

Thème : Géométrie dans l'espace

1. L'exercice proposé au candidat

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes. Pour chaque question, une seule des trois propositions a), b) ou c) est exacte. On demande d'indiquer laquelle, sans justification. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1) Soient A et B deux points distincts de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ est :
   a) l'ensemble vide b) un plan c) une sphère
2) On considère les points $E(0; 1; -2)$ et $F(2; 1; 0)$. Les coordonnées du barycentre G du système de points pondérés $\{(E; 1), (F; 3)\}$ sont :
   a) $G(6; 4; -2)$ b) $G(1{,}5; 1; -0{,}5)$ c) $G(0{,}5; 1; 1{,}5)$
3) Soit d la droite de représentation paramétrique $x = 2-t; \quad y = 3t; \quad z = -3, \quad t \in \mathbb{R}$. On considère les points $A(2; 3; -3), B(2; 0; -3)$ et $C(0; 6; 0)$. On a :
   a) $d = (AB)$ b) $d = (BC)$ c) $d \neq (AB)$ et $d \neq (BC)$ et $d \neq (CA)$
4) La droite de représentation paramétrique $x = -4t; \quad y = 1+3t; \quad z = 2+2t, \quad t \in \mathbb{R}$, et le plan d'équation $x - 2y + 5z - 1 = 0$ sont :
   a) orthogonaux b) parallèles c) ni orthogonaux ni parallèles.
5) L'ensemble des points tels que $x - y + 2z - 1 = 0$ et $-2x + 4y - 4z + 1 = 0$ est :
   a) l'ensemble vide b) une droite c) un plan

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ une justification des réponses aux questions 3) et 4) du QCM ;

◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Géométrie dans l'espace** ».

Le candidat présentera au jury :

◇ le contenu de ses fiches ;

◇ pour chaque item de ce QCM, les méthodes et les savoirs mis en jeu pour trouver la réponse exacte.

Dossier du 11 juillet 2010

Thème : Divers types de raisonnement

1. L'exercice proposé au candidat

Les propositions suivantes sont indépendantes. Pour chacune d'elles, préciser si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1) Toute suite numérique non majorée tend vers $+\infty$.
2) La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente.
3) Il existe un nombre réel a et un nombre réel b, tels que $e^{2a} + e^{2b} < 2\sqrt{e^{2a} \times e^{2b}}$.
4) Il existe une fonction f continue en un point x_0 et non dérivable en x_0.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse aux questions 2) et 3) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Divers types de raisonnement** » dans des domaines variés (arithmétique, géométrie, dénombrement, analyse, etc $\cdots$).

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 12 juillet 2010

Thème : Étude de configurations

1. L'exercice proposé au candidat

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ avec $x \in]0, +\infty[$. Soit a un réel strictement positif.

1) La droite $(\mathcal{D}_a)$, tangente à $(\mathcal{C})$ au point A d'abscisse a, coupe l'axe des abscisses en P_a et l'axe des ordonnées en Q_a. Déterminer les coordonnées de P_a et Q_a et montrer que l'aire du triangle OP_aQ_a est indépendante du réel a.

2) On considère un réel $k > \dfrac{2}{a}$. On note (Δ_k) la droite parallèle à $(\mathcal{D}_a)$ et passant par le point de coordonnées $(0, k)$. Montrer que lorsque k varie dans l'intervalle $]\dfrac{2}{a}, +\infty[$, la droite (Δ_k) coupe la courbe $(\mathcal{C})$ en deux points B_k et C_k et que le milieu I_k de $[B_k, C_k]$ est aligné avec O et A.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse à la question 2) ;

◇ un exercice se rapportant au thème « **Étude de configurations** ».

Le candidat présentera au jury :

◇ le contenu de ses fiches ;

◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 13 juillet 2010

Thème : Propriétés des fonctions

1. L'exercice proposé au candidat

Les questions sont indépendantes. Dans chacun des cas suivants, proposer une fonction f qui vérifie les propriétés données. On donnera l'expression de $f(x)$.

1) f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ae^{2x} + be^{x} + c.$$

La limite de f en $+\infty$ est $+\infty$ et l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, 0 et $\ln 2$.

2) f est une fonction définie sur $]0, +\infty[$, $f(2) = 4$ et, pour tout x et tout y strictement positifs on a :

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

3) f est une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2 et la valeur moyenne de f sur $[-2, 2]$ est 0.

4) f est une fonction paire, non constante, définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x+1) = f(x).$$

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse aux questions 2) et 4) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Propriétés des fonctions** ».

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 14 juillet 2010

Thème : Probabilités

1. L'exercice proposé au candidat

On place dans une urne 100 billets de loterie dont seulement deux sont gagnants.

1) Un joueur achète deux billets, qu'il tire simultanément dans l'urne.
   1.a) Quelle est la probabilité de ne pas gagner ?
   1.b) En déduire la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant.
2) Soit n un entier ($n \geqslant 2$). Un joueur achète n billets, qu'il tire simultanément dans l'urne.
   Soit A_n l'événement : « Avoir 1 ou 2 billet(s) gagnant(s) en achetant n billets ».
   2.a) Décrire à l'aide d'une phrase l'événement $\overline{A_n}$, événement contraire de A_n.
   2.b) Montrer que la probabilité de l'événement $\overline{A_n}$ est :

$$p\left(\overline{A_n}\right) = \frac{(100-n)(99-n)}{100 \times 99}.$$

   2.c) Quel est le nombre minimum n_0 de billets à acheter pour que la probabilité d'avoir au moins 1 billet gagnant soit supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ la réponse à la question 2.b) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Probabilités** ».

Le candidat présentera au Jury :

- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice ;
- ◇ le contenu de ses fiches.

Dossier du 15 juillet 2010

Thème : Équations différentielles

1. L'exercice proposé au candidat

On se propose d'étudier les fonctions f dérivables sur $[0,+\infty[$ vérifiant la condition

(1) $$\begin{cases} \text{pour tout } x \in [0,+\infty[, \quad f(x)f'(x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1) On se propose de démontrer qu'une fonction vérifiant la condition (1) est strictement positive sur $[0,+\infty[$.
   - 1.a) Montrer que si la fonction f vérifie (1) alors f ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$.
   - 1.b) On suppose que la fonction f vérifie la condition (1) et qu'il existe un réel a strictement positif tel que $f(a) < 0$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, a]$.
   - 1.c) Conclure.
2) Existence et unicité de la fonction :
   - 2.a) Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Déterminer une primitive de la fonction uu' sur cet intervalle.
   - 2.b) En déduire que si f est telle que, pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f(x)f'(x) = 1$ alors il existe une constante C telle que pour tout $x \in [0,+\infty[$,

$$(f(x))^2 = 2x + C.$$

   - 2.c) On rappelle que $f(0) = 1$. Déterminer l'expression de $f(x)$ pour x réel positif.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat présentera au Jury :

- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice ;
- ◇ le contenu de ses fiches.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponses aux questions 1.b) et 2.b) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Équations différentielles** ».

Dossier du 16 juillet 2010

Thème : Arithmétique

1. L'exercice proposé au candidat

L'âge du capitaine

Le capitaine a fait naufrage. Tout ce que l'on a retrouvé sur lui est sa carte de sécurité sociale. On parvient à déchiffrer son numéro INSEE, sauf le deuxième chiffre a et le troisième chiffre b qui sont illisibles : $1ab1271153044$ clé 67

Les deux chiffres a et b qui manquent sont, dans cet ordre, les deux derniers chiffres de l'année de naissance du capitaine. On se propose d'utiliser la clé du numéro INSEE pour retrouver cette année de naissance.

1) La clé K d'un numéro INSEE est calculée de la manière suivante : $K = 97 - R$ où R est le reste de la division euclidienne par 97 de l'entier N constitué par les 13 premiers chiffres du numéro INSEE.

   1.a) Démontrer que la clé K d'un numéro INSEE est telle que $N + K \equiv 0 \pmod{97}$.

   1.b) Déduire que, pour le numéro INSEE du capitaine, on a : $N \equiv 30 \pmod{97}$.

2) On écrit $1ab1271153044 = 1ab \times 10^{10} + A$, où $A = 1271153044$.

   2.a) Calculer le reste de la division euclidienne de A par 97.

   2.b) Justifier la congruence suivante : $10^2 \equiv 3 \pmod{97}$.

   2.c) En déduire que l'on a : $10^{10} \equiv 49 \pmod{97}$.

3) 3.a) Déduire des résultats établis aux questions 1) et 2) que l'on a :

$$1ab \times 49 \equiv 73 \pmod{97}$$

   3.b) Vérifier que l'on a : $49 \times 2 \equiv 1 \pmod{97}$

   3.c) Déterminer l'année de naissance du capitaine.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse à la question 3) ;

◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Arithmétique** ».

Le candidat présentera au jury :

◇ le contenu de ses fiches ;

◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.